المحاضرة الرابعة

[illegible] التكاملية في [illegible]

$K(x,t)$ [illegible]

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} g(t)\, dt \quad (1)$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$g(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)\, f(t)\, dt \quad (2)$$

$$K(x,t) = \frac{\lambda}{(x-t)^\alpha}$$

علماً أن

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} M(s)\, ds$$

$$M(s) = \frac{L(s)}{1 - L(s)}$$

$$L(s) = L_1(k) = \lambda \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty x^{-\alpha} e^{-sx}\, dx$$

$$L(s) = \lambda \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha-1}$$

$$M(s) = \frac{\lambda \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha-1}}{1 - \lambda \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha-1}}$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\lambda \Gamma(k-\alpha)\, s^{\alpha-1}}{1 - \lambda \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha-1}}\, e^{sx}\, ds \quad x > 0$$

$$\frac{\lambda \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha-1}}{1 - \lambda \Gamma(1-\alpha)\, s^{\alpha-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \Gamma(1-\alpha)\right)^n s^{n(\alpha-1)}$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum \left(\lambda \Gamma(1-\alpha)\right)^n \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} s^{n(\alpha-1)} e^{sx}\, ds$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \Gamma(1-\alpha)\right)^n \frac{2\pi i\, x^{n(1-\alpha)}}{x \Gamma(n(1-\alpha))}$$

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\lambda\Gamma(1-\alpha)\, x^{1-\alpha}\right)^{n}}{x\,\Gamma(n(1-\alpha))}$$

نبدل كل x بـ $x-T$ ونبدل في (3) نحصل على حل المعادلة المعطاة

حل المثال

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g(T)\, dT$$

حل هذه المعادلة بطريقة تحويل لابلاس وفق الخاصية

[4] نظرية الوجود والوحدانية

لتكن لدينا المعادلة

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g(T)\, dT \quad (1)$$

ونفرض أن

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)|\, dx = A \qquad A < 1 \quad (2)$$

اثبت أن للمعادلة حلاً محدوداً واحداً على الأكثر

البرهان: نفرض جدلاً أن هناك حلين محدودين $g_1(x)$ و $g_2(x)$ عندئذ

$$g_1(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g_1(T)\, dT$$

$$g_2(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g_2(T)\, dT$$

بطرح هاتين المعادلتين

$$g_1(x) - g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, [g_1(T) - g_2(T)]\, dT$$

نفرض أن $\psi(x) = g_1(x) - g_2(x)$

نحصل على معادلة تكاملية متجانسة

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, \psi(T)\, dT \quad (3)$$

التي لا حل محدود غير مطابق للصفر

ولكن هذا الأمر غير صحيح لأنه يقودنا إلى تناقض كما سنرى

لتكن δ الحد الأعلى للقيمة المطلقة لـ $\psi(x)$

$$|\psi(x)| \le \delta \qquad -\infty < x < +\infty$$

عندئذ نستطيع أن نجد من أجل كل ε موجب كيفي صغير قيماً لـ x بحيث يكون

$$|\psi(x)| < \delta - \varepsilon$$

بالتالي فإذا عوضنا إحدى هذه القيم لـ x في (3) ينتج

$$\delta - \varepsilon < |\psi(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x-T)|\, |\psi(T)|\, dT$$

$$\le \delta \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x-T)|\, dT \le \delta \int_{-\infty}^{+\infty} |K(T)|\, dT$$

$$= \delta \int_{-\infty}^{+\infty} |K(x)|\, dx = \delta A$$

أي أن

$$\delta - \varepsilon < \delta A$$

وهذا غير صحيح لأن من الشرط $A < 1$ وذلك لأنه يمكن اختيار ε صغيراً بقدر كافٍ

وبالتالي ينتج أن المعادلة تملك حلاً محدوداً واحداً على الأكثر

~~في حل المعادلة~~

Scanned by CamScanner

في حالة المعادلة

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\, g(t)\, dt \quad (1)$$

$A<1$ يأخذ الشكل $|\lambda| < A^{-1}$

معناه

$$|\lambda| A < 1 \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{A} < A^{-1}$$

بالإضافة الى ذلك يجب أن يوجد الحد هاشي الحل المحدود حلول مستمرة الهرعة ليست محدودة في المجال $-\infty < x < +\infty$

اوجد حل المعادلة ① وذلك بالاعتماد على تحويل لابلاس ثنائي الجانب

الحل:

نطبق تحويل لابلاس ثنائي الجانب على المعادلة ①

$$L_2(g) = L_2(f) + L_2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g(T)\, dT\right)$$

بالاعتماد على نظرية الطي وخواص لابلاس نحصل على

$$L_2(g) = L_2(f) + L_2(K)\, L_2(g)$$

$$F(s) = L_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$L(s) = L_2(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} K(x)\, dx$$

$$\Phi(s) = L_2(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} g(x)\, dx$$

نعوض في العلاقة السابقة فنحصل

$$\Phi(s) = F(s) + L(s)\, \Phi(s)$$

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)}$$

بأخذ مقلوب * (الاعتماد على الشكل العكسي)

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx}\, \Phi(s)\, ds$$

وهو حل المسألة بالاعتماد على لابلاس ثنائي الجانب

2) دراسة المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة للمعادلة ①

المعادلة المتجانسة الموافقة لـ (1) تأخذ الشكل

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g(T)\, dT \quad (1)$$

سوف نبحث عن حلول للمعادلة من الشكل

$$g(x) = e^{ax} \quad (2)$$

نعوض في ①

$$e^{ax} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-T)\, g(T)\, dT$$

نجري تغيير في المتحول من T الى T_1 عندئذٍ يكون

$$T_1 = x - T \Rightarrow T = x - T_1$$

$$dT = -dT_1$$

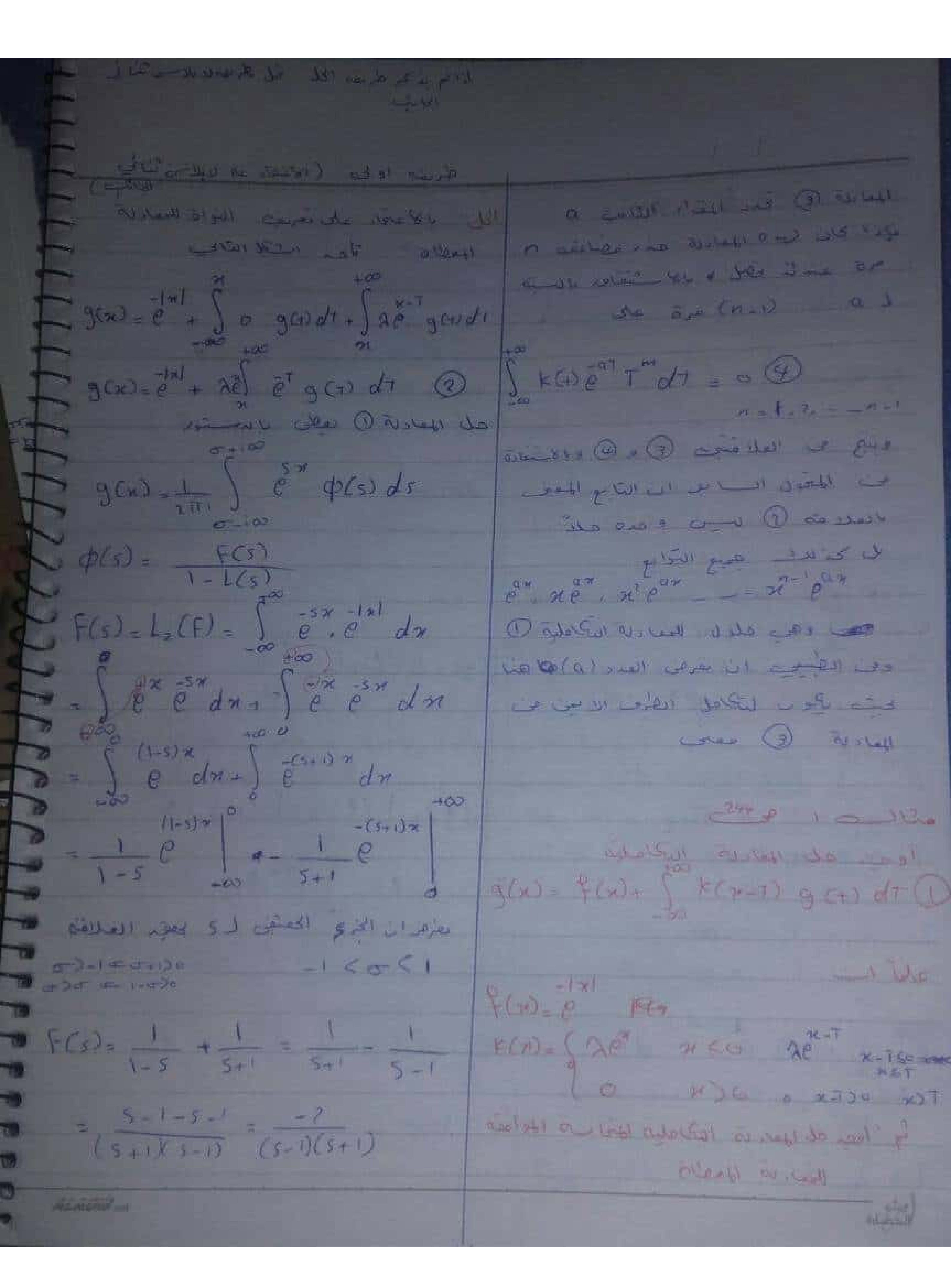
$$T = -\infty \Rightarrow T_1 = x + \infty = +\infty$$

$$T = +\infty \Rightarrow T_1 = x - \infty = -\infty$$

$$e^{ax} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(T_1)\, e^{a(x-T_1)}\, dT_1$$

باختصار الحدود المتشابهة نحصل

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} K(T_1)\, e^{-aT_1}\, dT_1 \quad (3)$$



الرائم نه في طريقه الحل حل المعادلة بلاسي تماثل الثانية

تمرين أو في (الاشتقاق عن التكامل تكاملي) (الثالث)

المعادلة ③ تحدد المقدار الثابت a فإذا كان لدى المعادلة جذر مضاعف n مرة عندئذ يمكن بالاستعانة بالنسبة لـ a على $(n-1)$ مرة على

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(t)\, e^{-at}\, T^{m}\, dT = 0 \quad ④$$

$n = 1, 2, \ldots, n-1$

وينتج من العلاقتين ③ و ④ وبالاستعانة من المحتوى السابق إن التابع المعرف بالعلاقة ② لمسألة وحدة حلول لو كان عدد جميع التوابع

$$e^{ax},\ x e^{ax},\ x^2 e^{ax} \ldots = x^{n-1} e^{ax}$$

وهي حلول المعادلة التكاملية ① ومن الطبيعي أن يعرض العدد (a) هنا حيث يكون لتكامل الطرف الايسر من المعادلة ③ معنى

مثال 1 ص 244

أوجد حل المعادلة التكاملية

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-T)\, g(T)\, dT \quad ①$$

علماً أن

$$f(x) = e^{-|x|}$$

$$k(x) = \begin{cases} \lambda e^{x} & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \qquad \lambda e^{x-T} \quad x - T \le 0,\ x \le T \qquad 0 \quad x - T > 0,\ x > T$$

ثم أوجد حل المعادلة التكاملية لحلول المعادلة المعطاة

الحل: بالاعتماد على تعريف النواة للمعادلة المعطاة تأخذ الشكل التالي

$$g(x) = e^{-|x|} + \int_{-\infty}^{x} 0\; g(T)\, dT + \int_{x}^{+\infty} \lambda e^{x-T}\, g(T)\, dT$$

$$g(x) = e^{-|x|} + \lambda e^{x} \int_{x}^{+\infty} e^{-T}\, g(T)\, dT \quad ②$$

حل المعادلة ② يعطى بالمستوى

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx}\, \phi(s)\, ds$$

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{1 - L(s)}$$

$$F(s) = L_2(F) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{-|x|}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x}\, e^{-sx}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, e^{-sx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+1)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{1-s} e^{(1-s)x} \Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{s+1} e^{-(s+1)x} \Big|_{0}^{+\infty}$$

نفرض أن الجزء الحقيقي لـ S يحقق العلاقة

$\sigma > -1 \Leftarrow \sigma + 1 > 0$

$\sigma < 1 \Leftarrow 1 - \sigma > 0$

$$-1 < \sigma < 1$$

$$F(s) = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{s - 1 - s - 1}{(s+1)(s-1)} = \frac{-2}{(s-1)(s+1)}$$

$$L(s) = L_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\, k(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-sx}\, \lambda e^{x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} 0\, e^{-sx}\, dx$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^{0} e^{(1-s)x}\, dx = \frac{\lambda}{1-s}\, e^{(1-s)x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{1-s} = \frac{-\lambda}{s-1}$$

علماً أن الجزء الحقيقي لـ s أي $\sigma < 1$

$$1 - L(s) = 1 + \frac{\lambda}{s-1} = \frac{s-1+\lambda}{s-1}$$

$$= \frac{s+(\lambda-1)}{s-1}$$

$$\phi(s) = \frac{\frac{-2}{(s-1)(s+1)}}{\frac{s+(\lambda-1)}{s-1}} = \frac{-2}{(s+1)(s+(\lambda-1))}$$

نبدل في الدستور التالي

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx}\, \phi(s)\, ds$$

$$g(x) = \frac{-2}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{sx}}{(s+1)[s-(1-\lambda)]}\, ds \quad (3)$$

وهنا نميز حالتين

1] نفرض النقطة $(1-\lambda)$ لا تقع على المحور التخيلي بل تقع على يمينه أي أن الجزء الحقيقي لـ $(1-\lambda)$ موجب وهنا نميز حالتين

أولاً: نفرض أن $x>0$ عندئذ نطبق نظرية الرواسب ملاحظين أن القطب $s=-1$ يقع على يسار مستقيم التكاملة (نأخذ الرواسب عند النقطة $s=-1$) عندئذ يكون حل المعادلة التكاملية المعطاة (1) في هذه الحالة هو

نطبق نظرية الرواسب عند الأقطاب السالبة

$$g(x) = -2\, Res(-1)$$

$$= -2 \lim_{s \to -1} \left[\frac{(s+1)\, e^{sx}}{(s+1)(s-(1-\lambda))} \right]$$

$$= \frac{-2 e^{-x}}{\lambda - 2} \qquad x>0$$

وذلك شرط $\lambda \neq 2$

ثانياً: نفرض أن $x<0$ نطبق نظرية الرواسب على الأقطاب الموجبة

$$g(x) = -2\, Res(1-\lambda)$$

$$= -2 \lim_{s \to 1-\lambda} \left\{ \frac{(s-(1-\lambda))\, e^{sx}}{(s+1)(s-(1-\lambda))} \right\}$$

$$= \frac{-2 e^{(1-\lambda)x}}{1-\lambda+1} = \frac{+2 e^{(1-\lambda)x}}{\lambda - 2} \qquad x<0$$

وذلك شرط $\lambda \neq 2$